CONCOURS D'ENTRÉE 1987

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES **DURÉE: 3 HEURES**

I

Les matrices qui interviennent dans cette partie sont carrées, d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), à coefficients réels. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n$.

On se propose de démontrer quelques propriétés du sous-ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices $\alpha = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$ satisfaisant à :

$$\forall\, j \in \{1, 2, ., n\},\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

(la somme des termes de chaque colonne de α est égale à 1).

1. Est-ce que $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$?
Le produit de deux éléments de $\mathcal{A}_n$ est-il un élément de $\mathcal{A}_n$?
Un élément de $\mathcal{A}_n$ est-il inversible ? Examiner si l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{A}_n$ est un groupe pour la multiplication .

2. On assimilera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Soit S_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs X tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.
Est-ce que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?
Soit $\alpha = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{A}_n$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à α dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que S_n est stable par f (c'est-à-dire : $f(S_n) \subset S_n$).
Même question pour l'hyperplan P des vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tels que : } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

3. Soit $\alpha = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{A}_n$.

a) Montrer que 1 est une valeur propre de α et que si cette valeur propre est simple alors il existe un vecteur propre associé à 1, appartenant à S_n.
(On pourra mettre (1-s) en facteur dans le déterminant caractéristique de α).

b) Montrer que si λ est une valeur propre de α distincte de 1, alors le sous-espace propre associé à λ est inclus dans P. En déduire que si α est diagonalisable, alors il existe un vecteur propre associé à 1 appartenant à S_n.

c) Etudier l'exemple $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

4. On considère, dans cette question, le sous-ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices α de $\mathcal{A}_n$ dont les coefficients sont tous strictement positifs.

a. Montrer que les valeurs propres de α, réelles ou complexes, ont un module inférieur ou égal à 1 et qu'il est strictement inférieur à 1 pour toute valeur propre $\lambda \neq 1$. Quelle conclusion peut-on en tirer pour le déterminant de α ? (On pourra utiliser la transposée de α).

b. Dans le cas où n = 3, montrer que 1 n'est pas une valeur propre double.

c. Est-ce que $\mathcal{T}_n$ est stable pour la multiplication ?

II

Dans un plan affine Π on donne un triangle ABC (A, B et C sont trois points non alignés). On rappelle qu'à tout point M de Π on peut associer un triplet unique de réels (x,y,z) tel que M soit le barycentre du système de points pondérés ((A,x) , (B,y) , (C,z)) avec $x + y + z = 1$.

Le triplet (x,y,z) est appelé système de coordonnées barycentriques normalisé de M, relatif à la base (A,B,C), ou plus simplement : coordonnées barycentriques de M.
On note M(x,y,z) le point M de coordonnées barycentriques (x,y,z).

1. Soit M(x,y,z) un point de Π. Quelles sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère cartésien $(C, \vec{CA}, \vec{CB})$?

2. Soit $(M_i\ (x_i,y_i,z_i), i \in \{1, 2, 3\})$ un triplet de points de Π.
Démontrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

T.s.v.p.

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX
et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt. Phy. Math-Math 251

3. Soit M(x,y,z) un point de Π non situé sur les côtés du triangle ABC. On suppose que la doite AM coupe la droite BC en P, que la doite BM coupe la droite CA en Q et que la droite CM coupe la droite AB en R.
Quelles sont les coordonnées barycentriques des points P, Q et R ?
On suppose que la droite QR coupe la droite BC en P' : déterminer les coordonnées barycentriques de P'. Comparer les réels k et k' déterminés par : $\overrightarrow{PB} = k\,\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{P'B} = k'\,\overrightarrow{P'C}$.
Soient I le point d'intersection des droites RC et PQ et J celui des droites BQ et RP : examiner si les points I, J, P' sont alignés.

4. Montrer que le point M(x,y,z) de Π décrit une droite D de Π si et seulement s'il existe trois réels u, v, w non tous égaux, tels que $ux + vy + wz = 0$ (équation barycentrique de D).
Caractériser l'équation barycentrique d'une droite passant par A ; puis celle de la droite BC.
Soit G l'isobarycentre du triangle ABC. A quelle condition nécessaire et suffisante la droite D passe-t-elle par G ?

5. Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites D ne passant pas par G. Montrer que $D \in \mathfrak{D}$ a une équation barycentrique $ux + vy + wz = 0$ où $u + v + w = 1$ (appelée : équation barycentrique normalisée de D).
Soit φ l'application de $\Pi \setminus |G|$ dans $\mathfrak{D}$ qui au point U(u,v,w) associe la droite D_U $(ux + vy + wz = 0)$. Montrer que φ est une bijection. U et V étant deux points de $\Pi \setminus |G|$, montrer l'équivalence logique : $V \in D_U \iff U \in D_V$.
On suppose que les droites RP et PQ coupent respectivement les droites AC et AB en Q' et R'. Montrer que les droites AP', BQ, CR' sont en général concourantes. Dans quel cas sont-elles parallèles ? Citer d'autres triplets de droites concourantes ou parallèles. Examiner si les points P', Q', R' sont alignés.

III

On considère des matrices α de $\mathcal{A}_3$ (voir partie I).

1. Pour $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ caractériser géométriquement la transformation T du plan Π dans lui-même qui au point M(x,y,z) associe le point M'(x',y',z') tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. On suppose à présent les coefficients de α tous positifs ou nuls. Soit M un point de Π, $M_1 = T(M)$ et par récurrence : $M_n = T(M_{n-1})$.
Examiner si la suite (M_n) $n \in \mathbb{N}^*$ a une limite et le cas échéant déterminer cette limite dans les cas suivants :

a) $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) Les coefficients de α sont strictement positifs et α a trois valeurs propres réelles distinctes.

c) Les coefficients de α sont strictement positifs et α a une valeur propre double.

---

page 252 1987
ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt.Phy.Math-Math 2